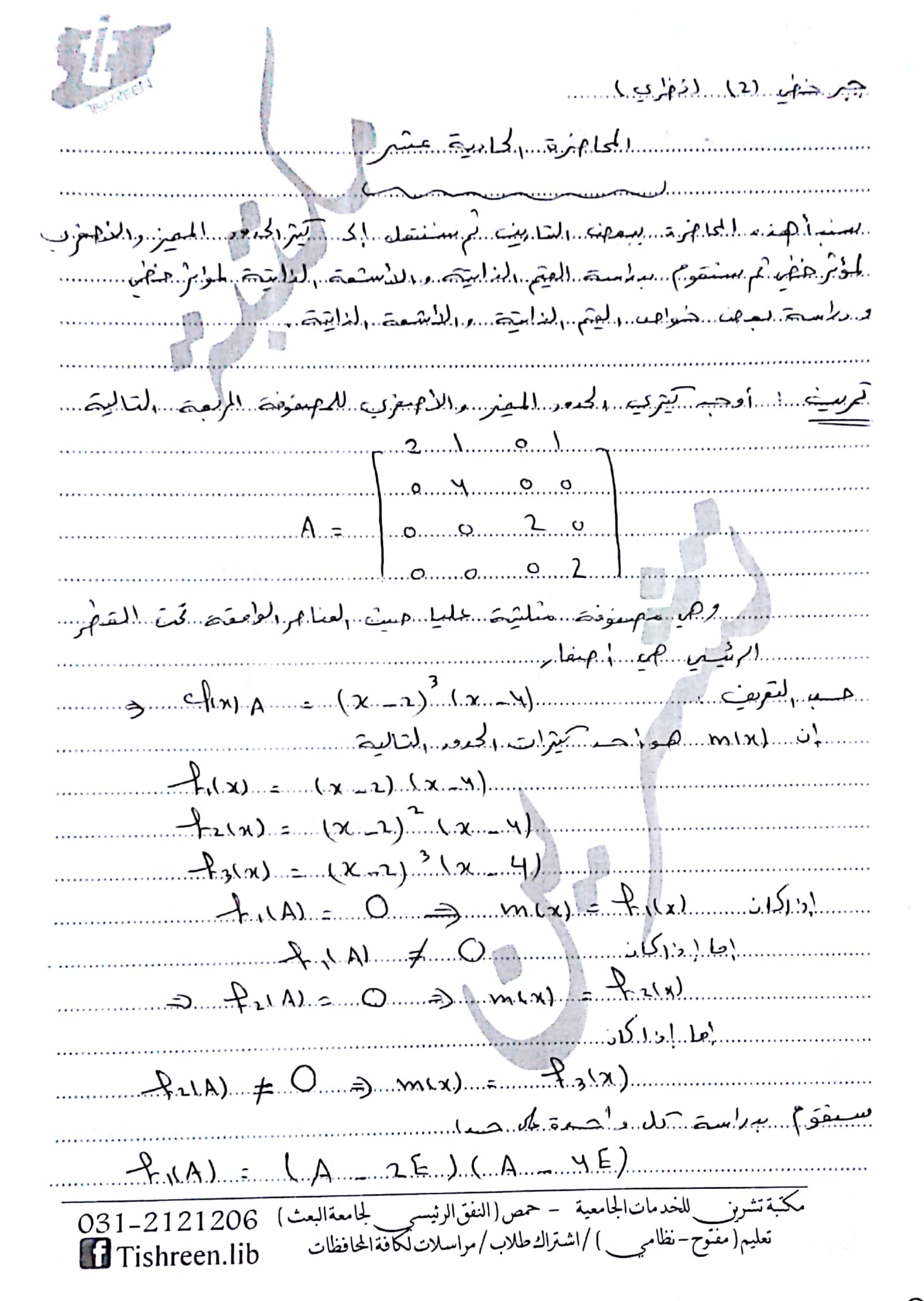


المحاضرة الحادية عشر

سنبدأ هذه المحاضرة ببعض التمارين ثم سننتقل إلى كثير الحدود المميز والأصغري لمؤثر خطي ثم سنقوم بدراسة القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمؤثر خطي ودراسة بعض خواص القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

تمرين: أوجد كثير الحدود المميز والأصغري للمصفوفة المربعة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلثية عليا حيث العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي هي أصفار

حسب التعريف $\Rightarrow ch(x)_A = (x-2)^3 (x-4)$

إن $m(x)$ هو أحد كثيرات الحدود التالية

$$f_1(x) = (x-2)(x-4)$$

$$f_2(x) = (x-2)^2 (x-4)$$

$$f_3(x) = (x-2)^3 (x-4)$$

إذا كان $f_1(A) = 0 \Rightarrow m(x) = f_1(x)$

أما إذا كان $f_1(A) \neq 0$

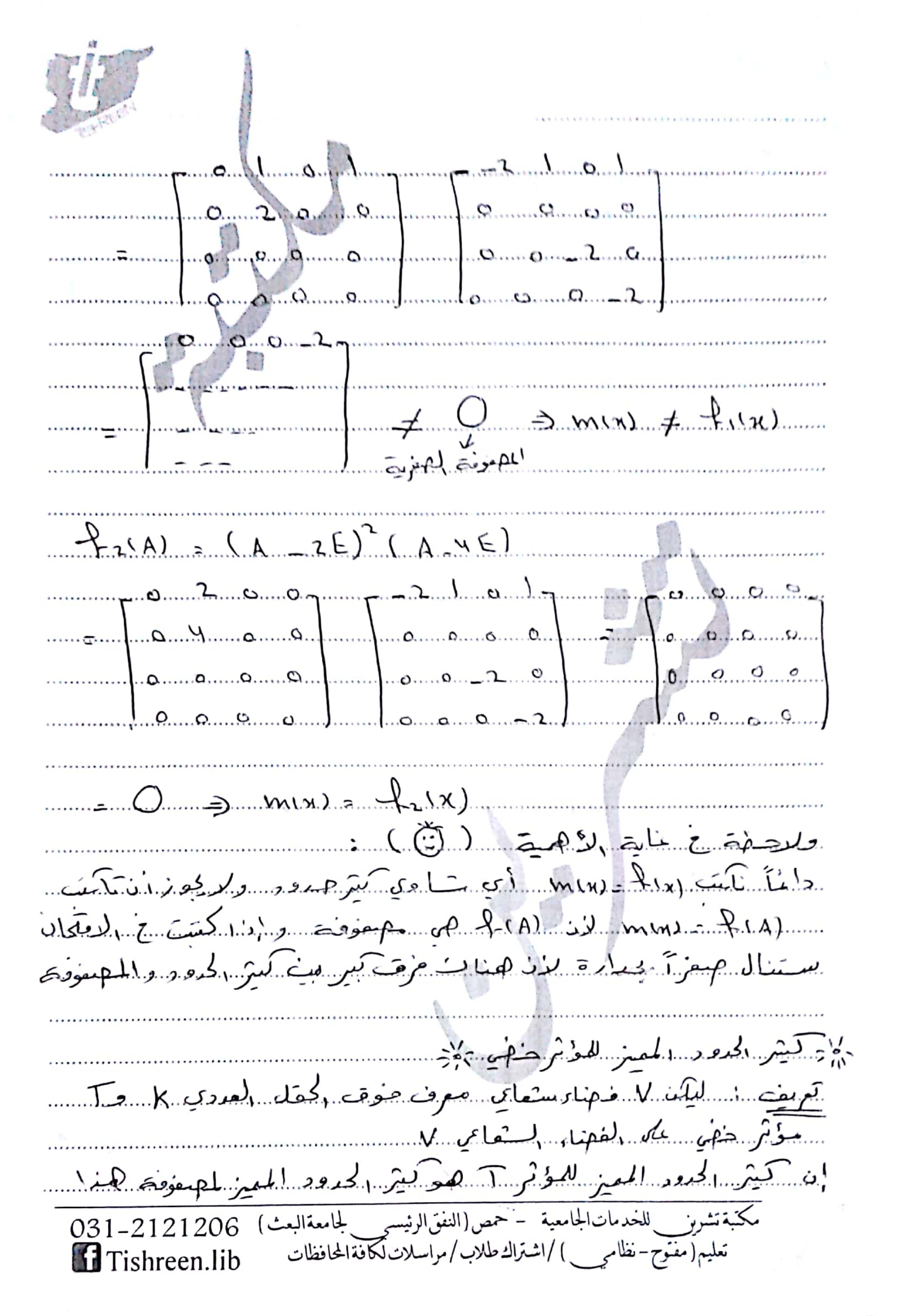
$\Rightarrow f_2(A) = 0 \Rightarrow m(x) = f_2(x)$

أما إذا كان

$f_2(A) \neq 0 \Rightarrow m(x) = f_3(x)$

سنقوم بدراسة كل واحدة على حدا

$$f_1(A) = (A - 2E)(A - 4E)$$



$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \neq O \Rightarrow m(x) \neq f_1(x)$$

المصفوفة الصفرية

$$f_2(A) = (A - 2E)^2 (A - 4E)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O \Rightarrow m(x) = f_2(x)$$

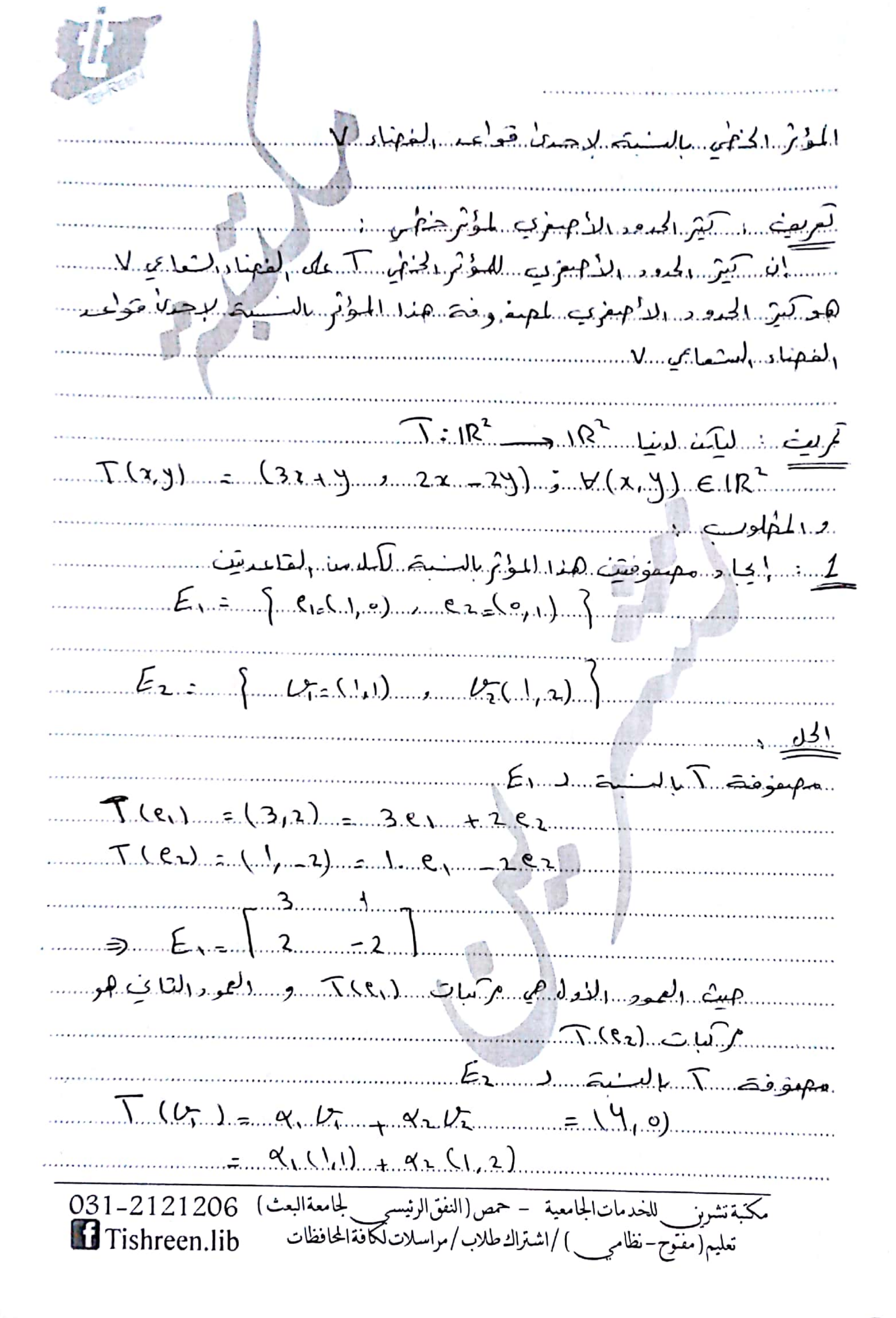
ملاحظة في غاية الأهمية (☺) :

دائماً نكتب $m(x) = f(x)$ أي تساوي كثير حدود ولا يجوز أن نكتب $m(x) = f(A)$ لأن $f(A)$ هي مصفوفة وإذا كتبت في الامتحان ستنال صفراً بجدارة لأن هناك فرق كبير بين كثير الحدود والمصفوفة

☼ كثير الحدود المميز للمؤثر خطي ☼

تعريف : ليكن V فضاء شعاعي معرف فوق الحقل العددي K و T مؤثر خطي على الفضاء الشعاعي V

إن كثير الحدود المميز للمؤثر T هو كثير الحدود المميز لمصفوفة هذا



المؤثر الخطي بالنسبة لإحدى قواعد الفضاء V

تعريف: كثير الحدود الأصغري لمؤثر خطي:

إن كثير الحدود الأصغري للمؤثر الخطي T على الفضاء الشعاعي V هو كثير الحدود الأصغري لمصفوفة هذا المؤثر بالنسبة لإحدى قواعد الفضاء الشعاعي V.

تمرين: ليكن لدينا $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (3x+y \,,\, 2x-2y) \;;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

والمطلوب:

1: إيجاد مصفوفتي هذا المؤثر بالنسبة لكل من القاعدتين

$$E_1 = \{ e_1=(1,0) \,,\, e_2=(0,1) \}$$

$$E_2 = \{ v_1=(1,1) \,,\, v_2=(1,2) \}$$

الحل:

مصفوفة T بالنسبة لـ E_1

$$T(e_1) = (3,2) = 3e_1 + 2e_2$$

$$T(e_2) = (1,-2) = 1e_1 - 2e_2$$

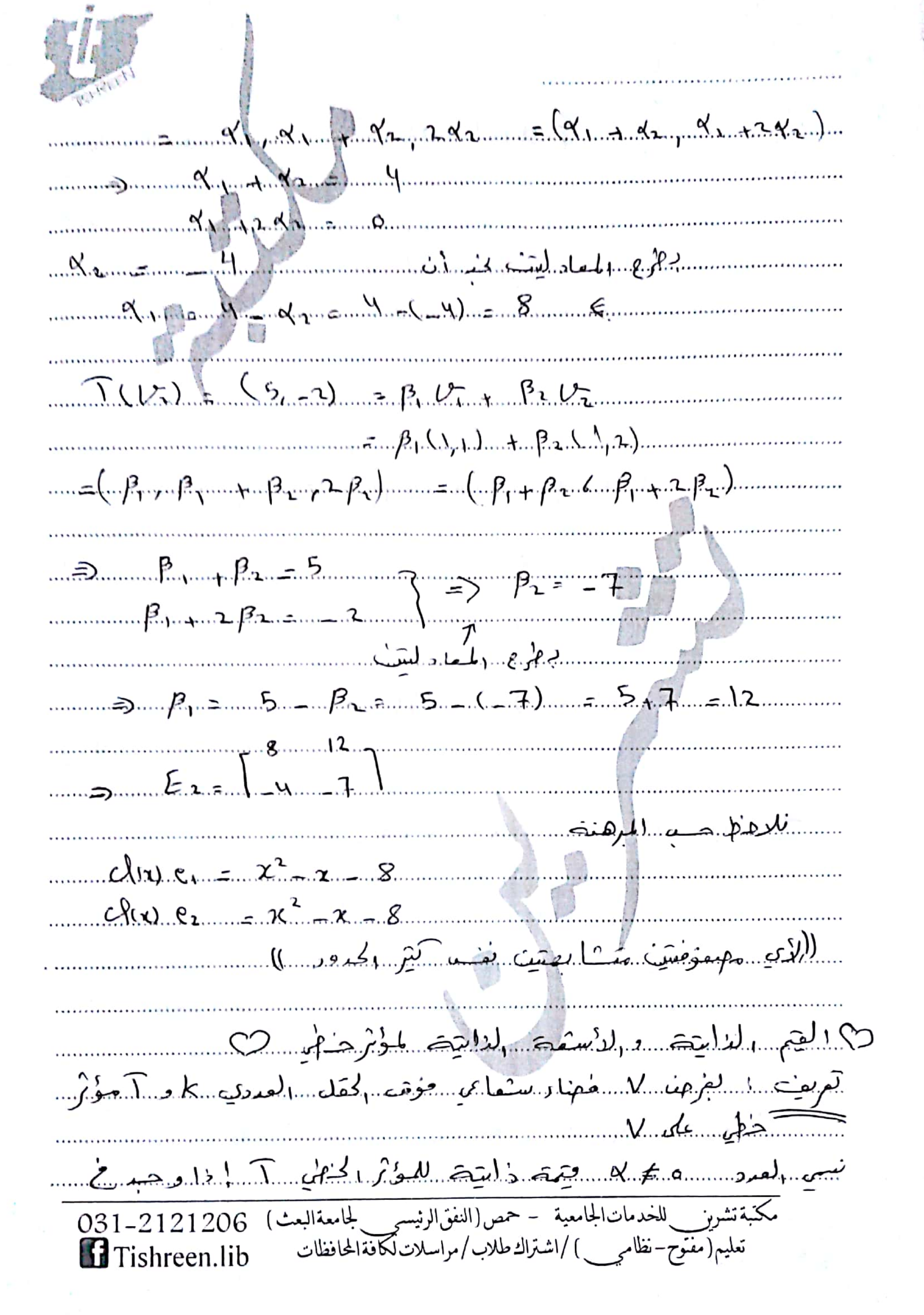
$$\Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

حيث العمود الأول هو مركبات $T(e_1)$ والعمود الثاني هو مركبات $T(e_2)$

مصفوفة T بالنسبة لـ E_2

$$T(v_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (4,0)$$

$$= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,2)$$



$= (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 4$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$

بطرح المعادلتين نجد أن $\alpha_2 = -4$

$\alpha_1 = 4 - \alpha_2 = 4 - (-4) = 8$

$T(v_2) = (5,-2) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$

$= \beta_1(1,1) + \beta_2(1,2)$

$= (\beta_1, \beta_1) + (\beta_2, 2\beta_2) = (\beta_1+\beta_2, \beta_1 + 2\beta_2)$

$\Rightarrow \beta_1+\beta_2 = 5$

$\beta_1 + 2\beta_2 = -2$ $\Big\} \Rightarrow \beta_2 = -7$

بطرح المعادلتين

$\Rightarrow \beta_1 = 5 - \beta_2 = 5 - (-7) = 5+7 = 12$

$\Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$

نلاحظ حسب المبرهنة

$c(x)_{e_1} = x^2 - x - 8$

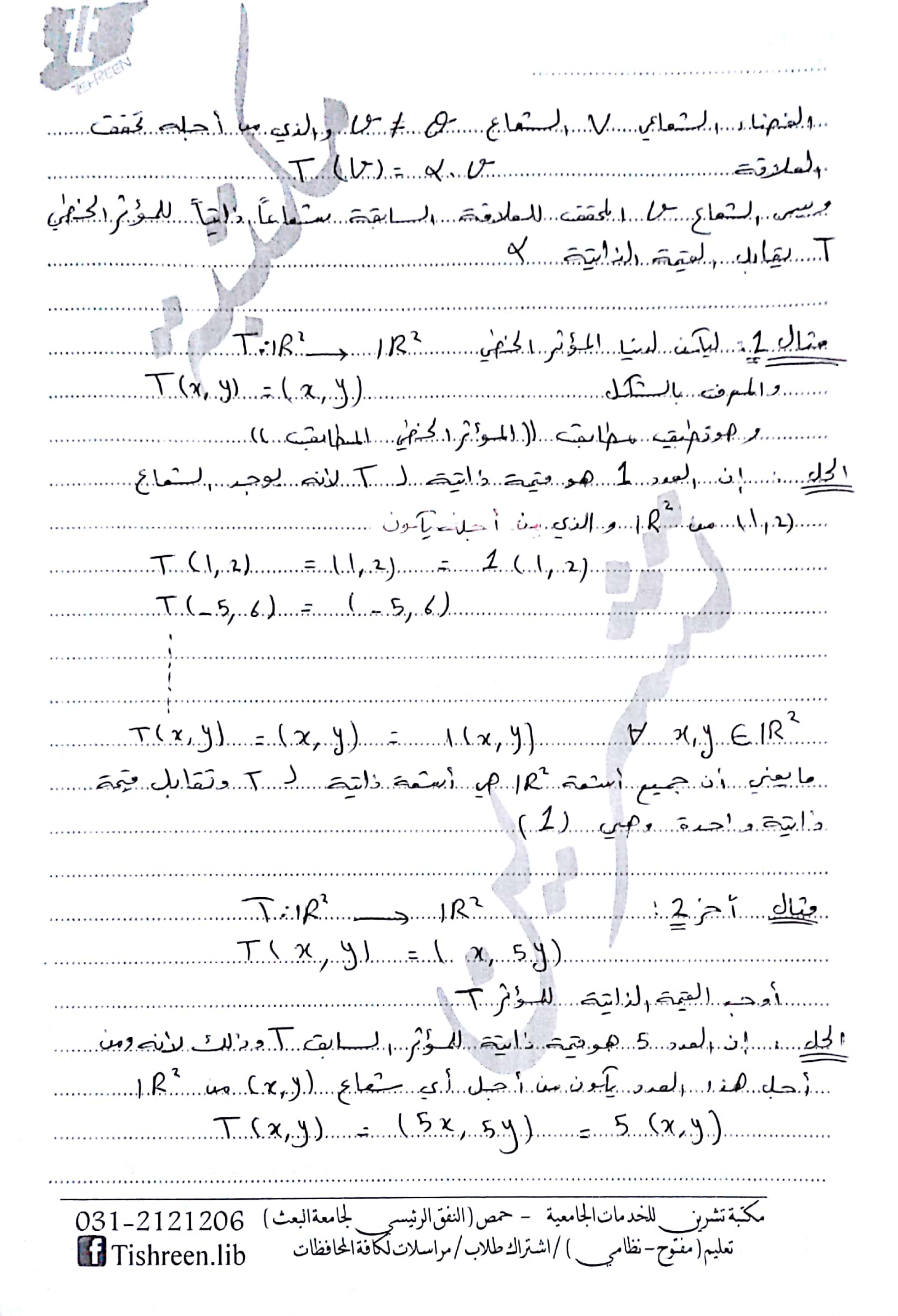
$c(x)_{e_2} = x^2 - x - 8$

((أي مصفوفتين متشابهتين نفس كثير الحدود))

♡ القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمؤثر خطي ♡

تعريف: لنفرض V فضاء شعاعي فوق الحقل العددي K و T مؤثر خطي على V

نسمي العدد $\alpha \neq 0$ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T إذا وجد ش



الفضاء الشعاعي V الشعاع $v \neq 0$ والذي من أجله تحقق العلاقة $T(v) = \alpha . v$

يسمى الشعاع v المحقق للعلاقة السابقة شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي T يقابل القيمة الذاتية α

مثال 1: ليكن لدينا المؤثر الخطي $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$

والمعرف بالشكل $T(x, y) = (x, y)$

وهو تطبيق مطابق ((المؤثر الخطي المطابق))

الحل: إن العدد 1 هو قيمة ذاتية لـ T لأنه يوجد الشعاع $(1,2)$ من IR^2 والذي من أجله يكون

$$T(1,2) = (1,2) = 1(1,2)$$

$$T(-5,6) = (-5,6)$$

$$\vdots$$

$$T(x,y) = (x,y) = 1(x,y) \quad \forall\ x,y \in IR^2$$

ما يعني أن جميع أشعة IR^2 أشعة ذاتية لـ T وتقابل قيمة ذاتية واحدة وهي (1)

مثال آخر 2: $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$

$$T(x, y) = (x, 5y)$$

أوجد القيمة الذاتية للمؤثر T

الحل: إن العدد 5 هو قيمة ذاتية للمؤثر السابق T وذلك لأنه ومن أجل هذا العدد يكون من أجل أي شعاع (x,y) من IR^2

$$T(x,y) = (5x, 5y) = 5(x,y)$$

أي أن لهذا المؤثر الخطي قيمة ذاتية وحيدة هي 1 وأن كل أشعة $\mathbb{R}^2$ تقابل القيمة الذاتية

ملاحظة: من الآن فصاعداً أي شعاع ذاتي لمؤثر خطي ما لا يساوي O وأي قيمة ذاتية لهذا المؤثر هي قيمة مغايرة للصفر

سؤال كيف نبحث عن القيمة الذاتية ؟

الحل:

بفرض أن $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ T يوجد شعاع الشعاع

$$(x, y) \neq O$$

والذي من أجله يكون

$$T(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{①}$$

$$T(x,y) = (x,y) \quad \text{②}$$

من العلاقتين نجد $x, y = \lambda x, \lambda y$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda x = x \\ \lambda y = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\lambda-1)x + 0 . y = 0 \\ 0 . x + (\lambda-1)y = 0 \end{array}\right| *$$

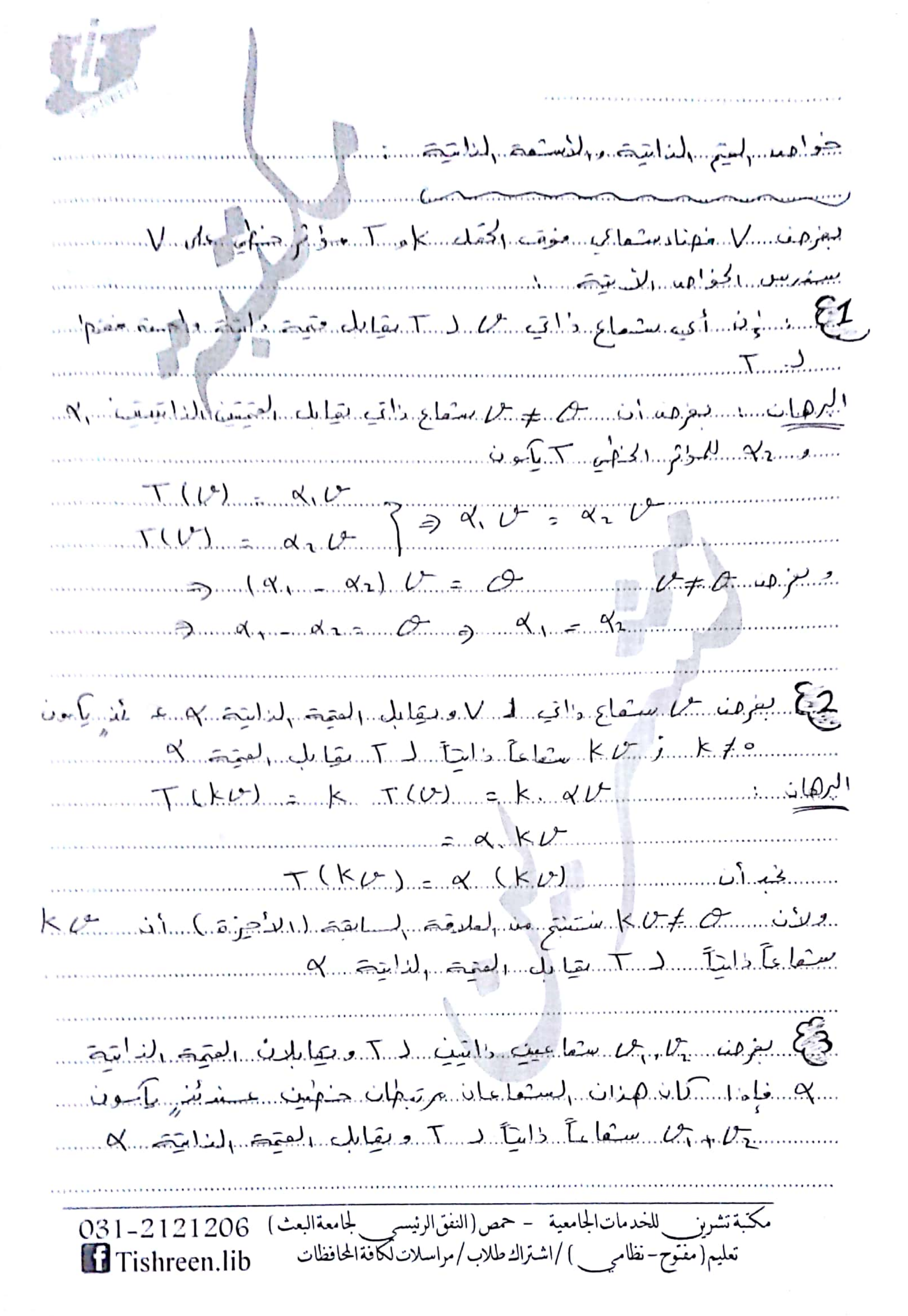
يكون للمعادلتين الخطيتين المتجانستين السابقتين حلاً غير الحل الصفري عندما يكون معين أمثال هذه الجملة مساوياً للصفر أي عندما يكون

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

حسب المثال الأول $\underline{1}$



خواص القيم الذاتية والأشعة الذاتية :

لنفرض V فضاء شعاعي فوق الحقل K و T مؤثر خطي على V يحقق الخواص الآتية :

ع1 : إن أي شعاع ذاتي v لـ T يقابل قيمة ذاتية واحدة فقط لـ T

البرهان : نفرض أن $v \neq 0$ شعاع ذاتي يقابل القيمتين الذاتيتين α_1 و α_2 للمؤثر الخطي T يكون

$$\left.\begin{array}{l} T(v) = \alpha_1 v \\ T(v) = \alpha_2 v \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 v = \alpha_2 v$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) v = 0$$ وبفرض $v \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

ع2 : نفرض v شعاع ذاتي لـ V ويقابل القيمة الذاتية α عندئذٍ يكون $kv \; ; \; k \neq 0$ شعاعاً ذاتياً لـ T يقابل القيمة α

البرهان :

$$T(kv) = k \, T(v) = k . \alpha v$$
$$= \alpha . kv$$

نجد أن $T(kv) = \alpha (kv)$

ولأن $kv \neq 0$ نستنتج من العلاقة السابقة (الأخيرة) أن kv شعاعاً ذاتياً لـ T يقابل القيمة الذاتية α

ع3 : نفرض v_1 , v_2 شعاعين ذاتيين لـ T ويقابلان القيمة الذاتية α فإذا كان هذان الشعاعان مرتبطان خطياً عندئذٍ يكون $v_1 + v_2$ شعاعاً ذاتياً لـ T ويقابل القيمة الذاتية α

البرهان: $v_1 = t\, v_2$

$\Rightarrow v_1+v_2 = t\, v_2 + v_2$

$= (t+1)\, v_2$

بحسب الخاصية (2) نستنتج أن v_1+v_2 هو شعاع ذاتي لـ T
ويقابل القيمة الذاتية α

4) نفرض v_1, v_2 شعاعين ذاتيين لـ T ويقابلان القيمة الذاتية α فإذا كان هذا الشعاعان مستقلان خطياً فإن v_1+v_2 يكون شعاعاً ذاتياً لـ T ويقابل القيمة الذاتية α

البرهان: $T(v_1+v_2) \overset{?}{=} \alpha(v_1+v_2)$

$\lambda_1 = T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

$= \alpha(v_1+v_2) = \lambda_2$

$\Rightarrow T(v_1+v_2) = \alpha(v_1+v_2)$

ولأن $v_1+v_2 \neq \theta$ (لأنه لو كان $v_1+v_2=\theta$ يكون $v_1 = -v_2$
وبالتالي يكون الشعاعان مرتبطين وفرضنا لدينا الشعاعان مستقلان)
نستنتج من ذلك (العلاقة الأخيرة) أن v_1+v_2 شعاعاً ذاتياً لـ T ويقابل القيمة الذاتية α

«انتهت المحاضرة الحادية عشر»

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

إعداد: ناهد الشميني